

Septième partie:

Systemes de points matériels, lois de conservation

Notions abordées:

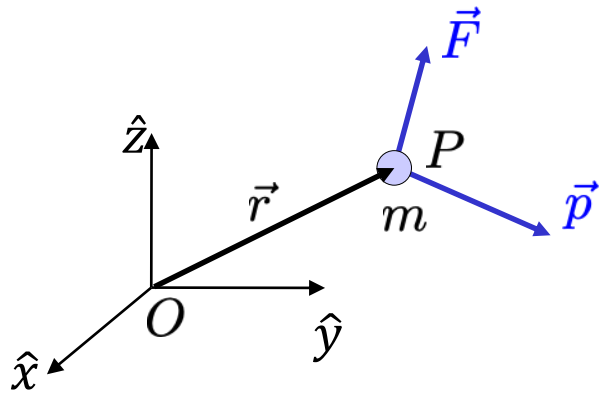
- 7.1 Résumé: 2ème loi de Newton et théorème du moment cinétique pour un point matériel
- 7.2 Systemes de points matériels: énoncé général de la 3ème loi de Newton
- 7.3 Statique
- 7.4 Systemes isolés et lois de conservation
- 7.5 Centre de masse, théorème du centre de masse
- 7.6 “Problème à deux corps”
- 7.7 Chocs et collisions

Buts:

- Assimiler et savoir appliquer les lois de la mécanique newtonienne à des systemes impliquant plusieurs points matériels

7.1 Résumé: 2ème loi et théorème du moment cinétique

(pour un point matériel P)



Résultante des forces:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

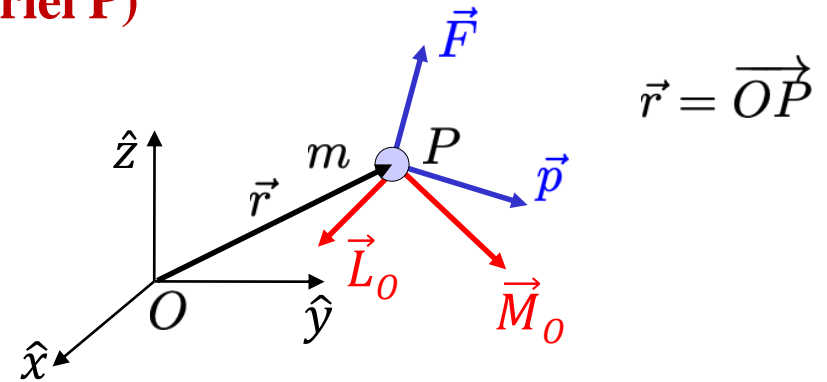
Quantité de mouvement

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

2ème loi de Newton

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

équivalente à $\vec{F} = m\vec{a}$ si m constante



Moment de la résultante des force par rapport à un point O :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \sum \vec{r} \wedge \vec{F}_i = 0 \text{ si force centrale}$$

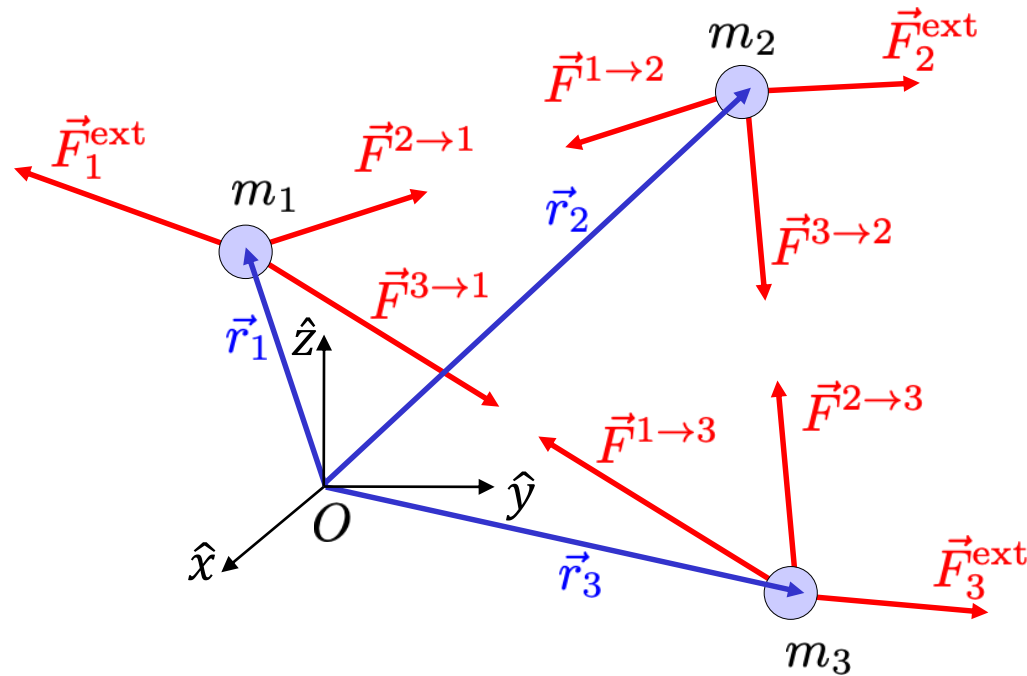
Moment cinétique par rapport au point O :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = 0 \text{ si force centrale}$$

7.2 Système de plusieurs points matériels



- On suppose que chaque point matériel P_α du système subit:
 - une résultante des **forces extérieures** F_α^{ext} exercée depuis l'extérieur du système
 - des **forces intérieures** $F^{\beta \rightarrow \alpha}$ exercées par les autres points P_β du système (uniquement forces « à deux corps ») \Rightarrow **Troisième loi de Newton**, appliquée à chaque point P_α du système: **action et réaction sont égales, opposées et dirigées selon le vecteur reliant les positions de chaque couple de points matériels**

7.2 Système de plusieurs points matériels

Formulation mathématique de la 3^{ème} loi de Newton:

action et réaction sont égales, opposées et dirigées selon le vecteur reliant les points matériels

$$\vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{F}^{\alpha \rightarrow \beta} = 0$$

$$\vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{M}_O^{\alpha \rightarrow \beta} = \vec{r}_\alpha \wedge \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{r}_\beta \wedge \vec{F}^{\alpha \rightarrow \beta} = (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \wedge \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$$

$$\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta = \vec{r}_{\alpha\beta} \parallel \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha}$$

3^{ème} loi de Newton
(énoncé générale)

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$$

La somme des forces
internes est nulle

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$$

La somme des moments des forces
internes est nulle

7.2 Système de points matériels: eqs de mouvement

- Quantité de mouvement totale:

$$\vec{p} \equiv \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{d\vec{p}_{\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \right) = \underbrace{\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}^{\beta \rightarrow \alpha}}_{=0} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}}_{\equiv \vec{F}^{\text{ext}}}$$

2ème loi de Newton pour P_{α}

- Moment cinétique total (par rapport à O):

$$\vec{L}_O \equiv \sum_{\alpha} \vec{L}_{O,\alpha}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{d\vec{L}_{O,\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha} + \vec{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} \right) = \underbrace{\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{M}_O^{\beta \rightarrow \alpha}}_{=0} + \underbrace{\sum_{\alpha} \vec{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}}}_{\equiv \vec{M}_O^{\text{ext}}}$$

Théorème du moment cinétique pour P_{α}

Lois générales de la dynamique pour un système de points matériels

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

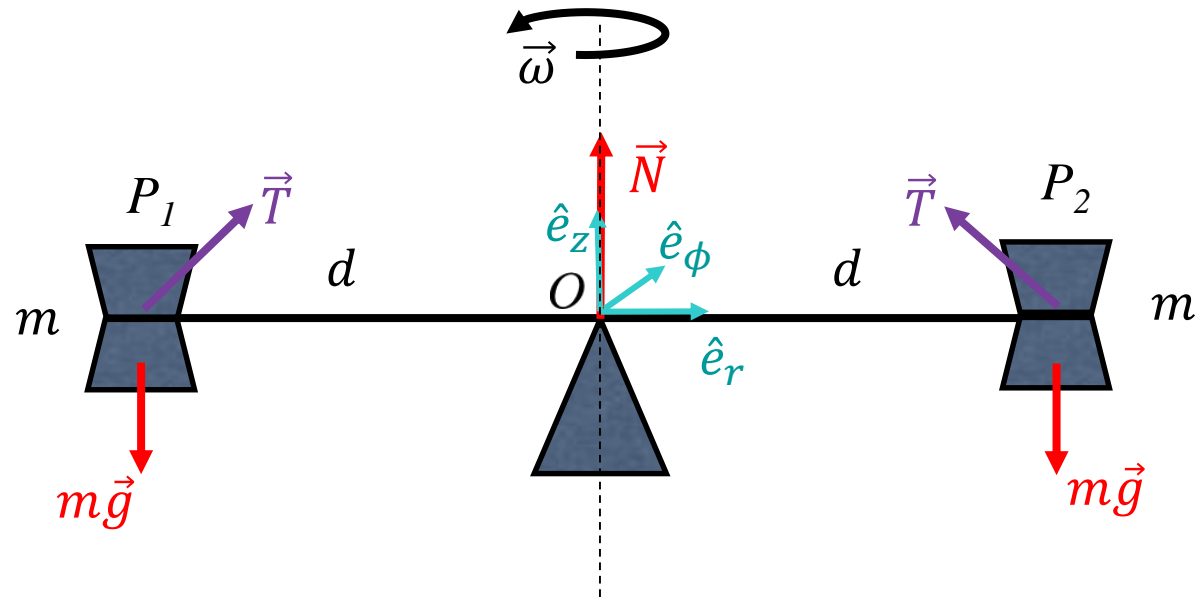
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

Seules les forces extérieures déterminent l'évolution:

- de la quantité de mouvement totale
- du moment cinétique total

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad \text{avec } \vec{r}_i = \text{point d'application de la force } \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

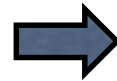
7.2 Ex.: tabouret tournant



$$\vec{N} - 2m\vec{g} = 0 \quad (\text{le tabouret ne se déplace pas})$$

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 = \omega d \hat{e}_\phi$$

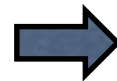


$$\vec{L}_O = 2d^2m\omega \hat{e}_z$$



$$d^2\omega = \text{cste}$$

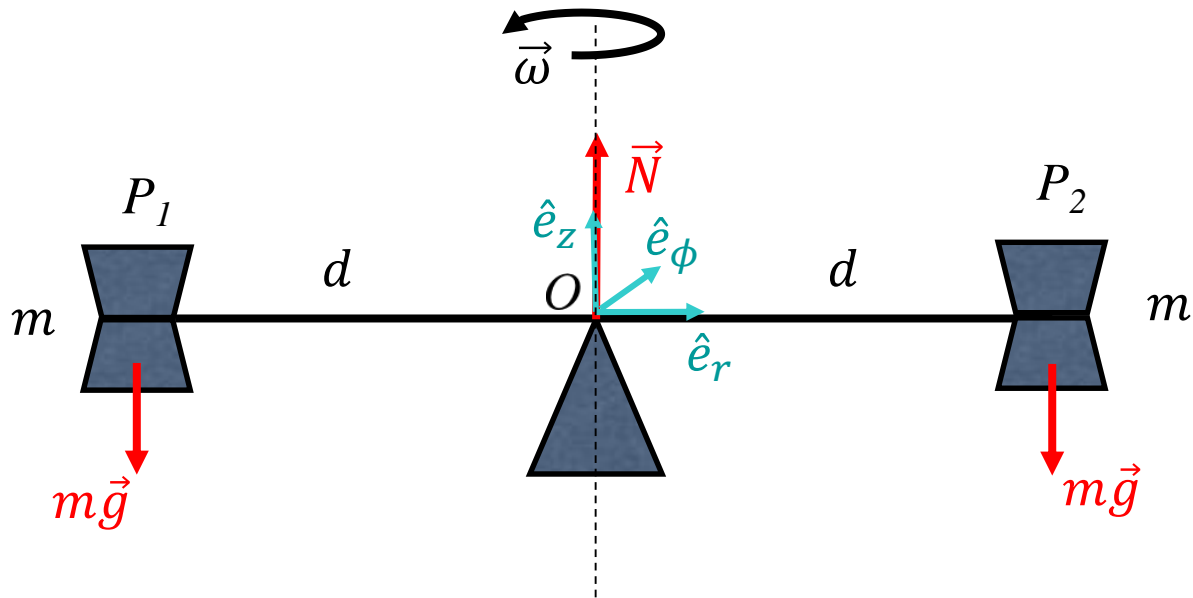
$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = 0$$



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$$

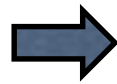
Les forces internes entre tiges et masses m se compensent

7.2 Ex.: tabouret tournant

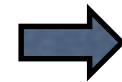


$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 = \omega d \hat{e}_\phi$$

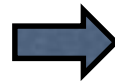


$$\vec{L}_O = 2d^2 m \omega \hat{e}_z$$



$$d^2 \omega = \text{cste}$$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = 0$$



$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$$

Pour deux distances d et D des masses par rapport à O on a : $d^2 \omega_d = D^2 \omega_D$

$$E_d = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = m d^2 \omega_d^2; \quad E_D = m D^2 \omega_D^2$$

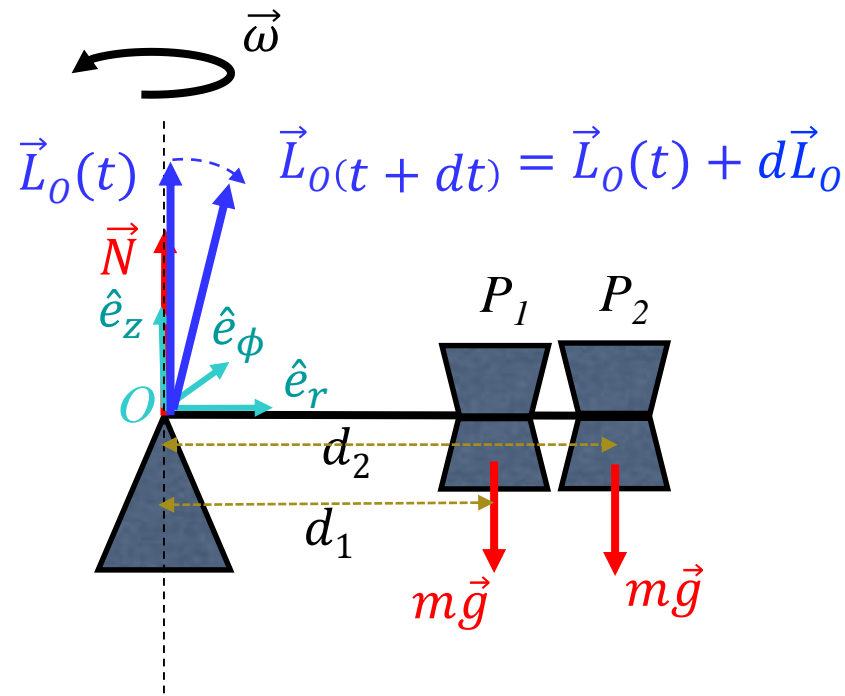
$$E_d = m d^2 \omega_d^2 = m d^2 \frac{D^4}{d^4} \omega_D^2 = m \frac{D^4}{d^2} \omega_D^2 = \frac{D^2}{d^2} E_D \neq E_D$$



E n'est pas conservée
(les forces internes travaillent)

7.2 Ex.: tabouret tournant

Coordonnées cylindrique $O\hat{e}_r\hat{e}_\phi\hat{e}_z$



$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = \omega d_2 \hat{e}_\phi$$

$$\vec{v}_1 = \omega d_1 \hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = m\omega(d_1^2 + d_2^2)\hat{e}_z$$

$\Rightarrow \vec{L}_O$ veut tourner
autour de \hat{e}_r
(il faut un torque contraire
pour éviter la rotation)

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} =$$

$$mg(d_1 + d_2)\hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = mg(d_1 + d_2)\hat{e}_\phi$$

7.3 Système à l'équilibre (statique)

- Un système est à l'équilibre si:

$$\begin{cases} \vec{r}_\alpha(t) = \text{constante} \\ \vec{v}_\alpha(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} - \text{ pour tout point } \alpha \text{ du système} \\ - \text{ pour chaque instant } t \end{array}$$

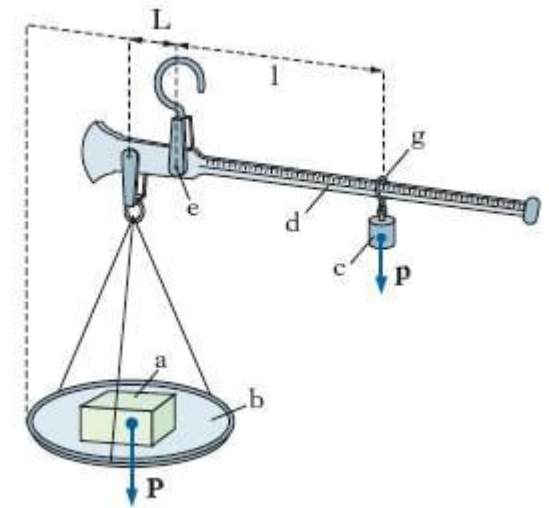
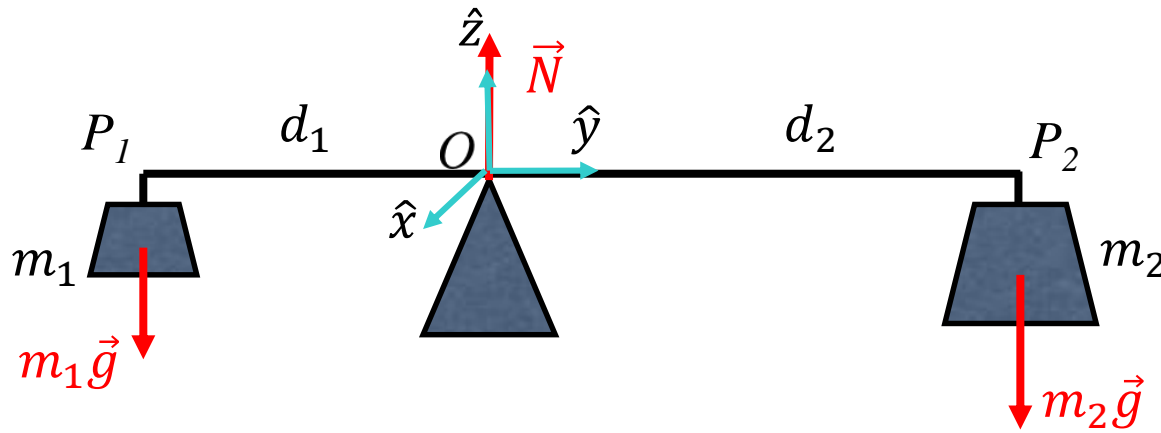
- Dans ce cas on a: [pour tout point O du référentiel]

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{p} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = 0 \\ \vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \\ \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \end{array}}$$

Conditions d'équilibre
pour un système de points matériels
(en particulier pour un solide indéformable)

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad \text{avec } \vec{r}_i = \text{point d'application de la force } \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

7.3 Ex.: balance en équilibre



Balance romaine

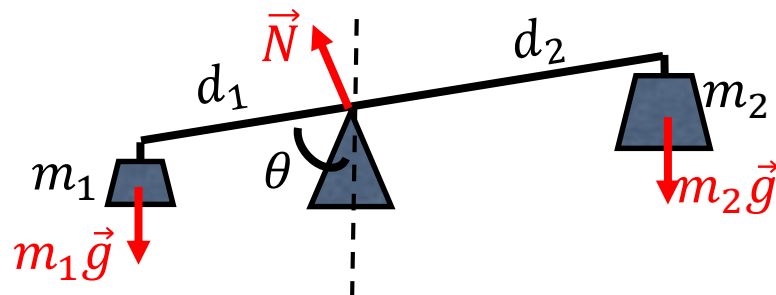
A l'équilibre:

$$\vec{F}^{ext} = 0 \rightarrow \vec{N} + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = 0 \rightarrow \vec{N} = -(m_1 + m_2)\vec{g}$$

$$\vec{M}_O^{ext} = 0 \rightarrow \overrightarrow{OP_1} \wedge m_1\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m_2\vec{g} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{N} = d_1 m_1 g - d_2 m_2 g = 0$$

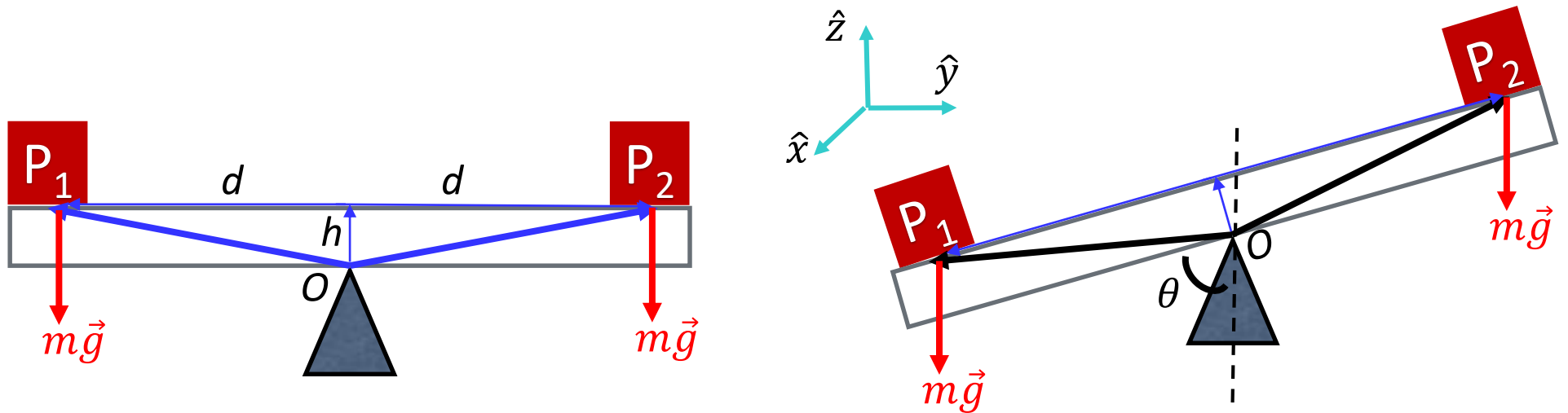
$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Curiosité: on trouve $d_1 m_1 = d_2 m_2$ aussi pour une balance inclinée !!!
 Pourquoi on dit que les deux masses sont identiques quand une balance est horizontale?



$$d_1 \sin \theta m_1 g - d_2 \sin \theta m_2 g = 0$$

7.3 Pourquoi une balance en équilibre est horizontale?

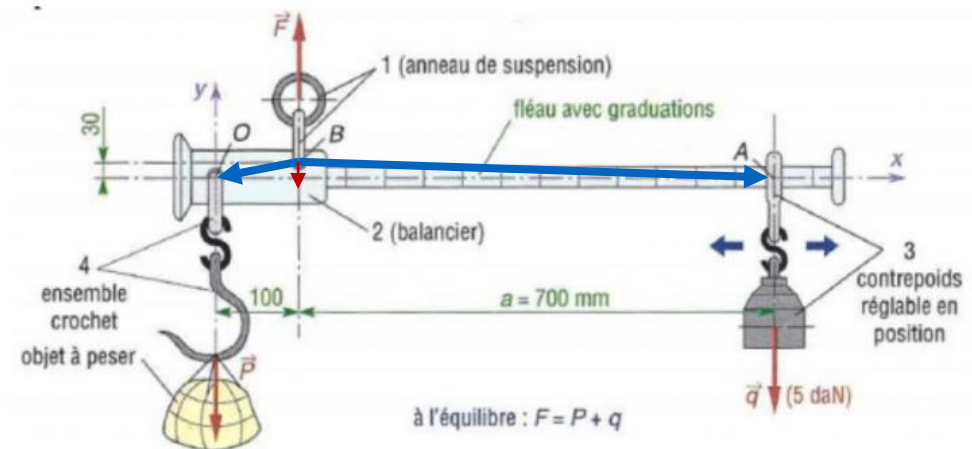


Par construction le point de rotation n'est pas exactement aligné avec le point de application des forces sur les bras:

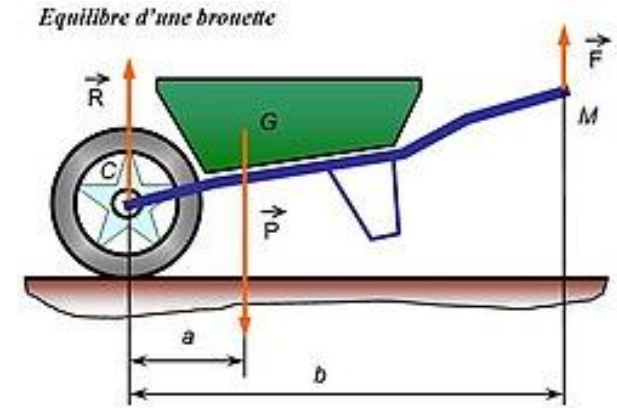
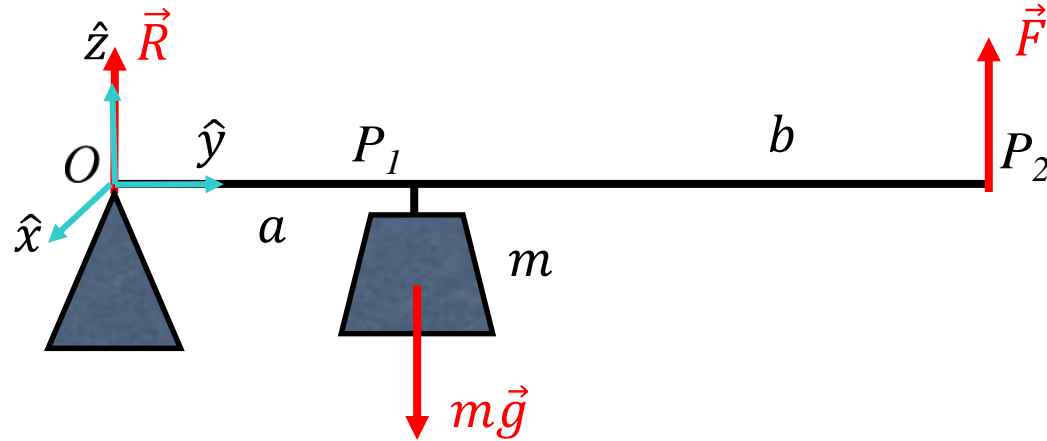
Horizontale: $\vec{M}_O^{ext} = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g} = -d\hat{y} \wedge m\vec{g} + h\hat{z} \wedge m\vec{g} + d\hat{y} \wedge m\vec{g} + h\hat{z} \wedge m\vec{g} = 0$

Inclinée: $\vec{M}_O^{ext} = \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge m\vec{g}$
 $= -\hat{d} \wedge m\vec{g} + (h \sin \theta \hat{z} + h \cos \theta \hat{y}) \wedge m\vec{g}$
 $+ \hat{d} \wedge m\vec{g} + (h \sin \theta \hat{z} + h \cos \theta \hat{y}) \wedge m\vec{g}$
 $= -2h \cos \theta m g \hat{x}$

Ce moment des forces génère un $\vec{L}_O = -L_O \hat{x}$ donc une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre



7.3 Ex.: brouette en équilibre



A l'équilibre:

$$\vec{F}^{ext} = 0 \rightarrow \vec{R} + m\vec{g} + \vec{F} = 0 \rightarrow R + F = mg$$

$$\vec{M}_O^{ext} = 0 \rightarrow \overrightarrow{OP_1} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OP_2} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} = amg - bF = 0$$

$$F = \frac{a}{b}mg < mg$$

7.3 Ex.: baroscope



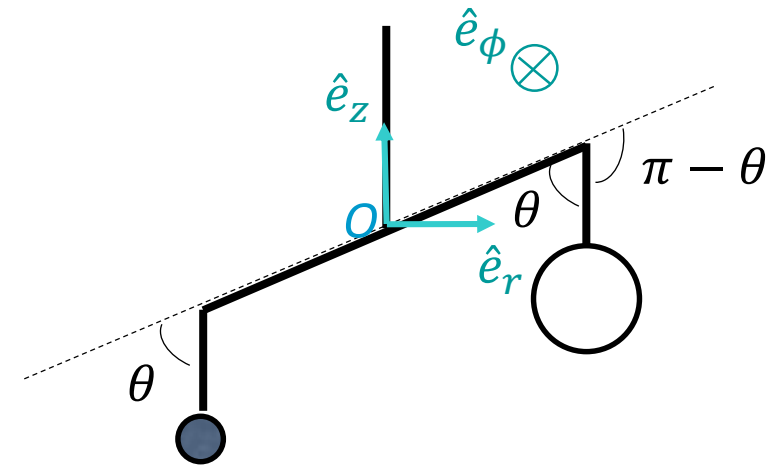
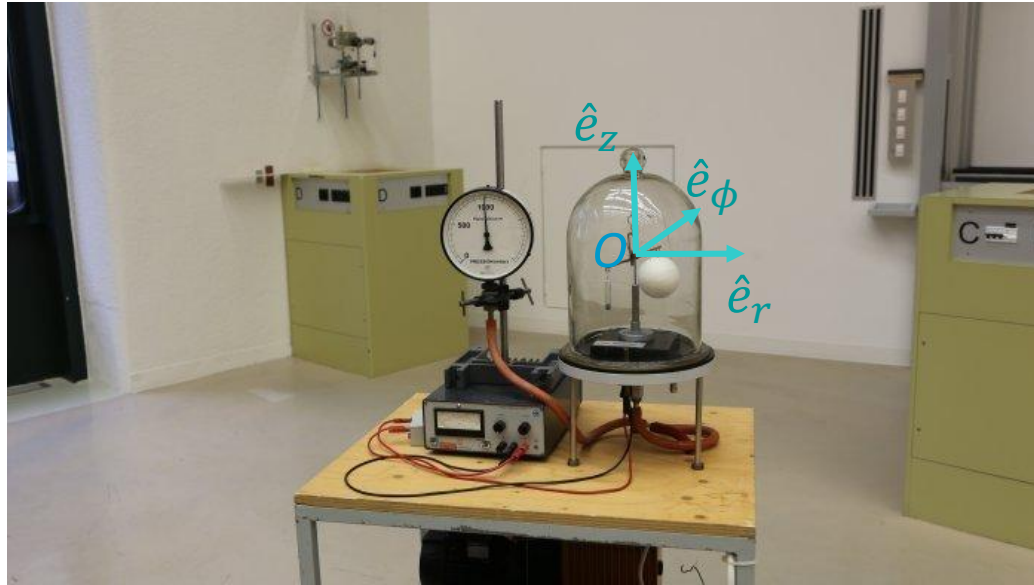
Une masse de plomb de petite taille est relié par un tige à une masse de Sagex (polystyrène) de grande taille. La tige est suspendue par son centre. Dans l'air le système est à l'équilibre. Que se passe-t-il dans le vide ?

1) Le système reste à l'équilibre

2) La boule de polystyrène monte et celle de plomb descend

3) La boule de polystyrène descend et celle de plomb monte

7.3 Ex.: baroscope



Chaque masse est soumise à la force de gravité et à la poussée d'Archimède:

Pour chaque masse:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = m\vec{g} - \rho V \vec{g}$$

ρ est la densité du fluide
 V le volume déplacé

Dans l'air: $\vec{M}_O^{ext} = 0$ (condition d'équilibre)

$$(m_p g - \rho_a V_p g) d_p \sin \theta = (m_s g - \rho_a V_s g) d_s \sin \theta \quad \Rightarrow \quad m_p = m_s - \rho_a (V_s - V_p) \quad (d_p = d_s = d)$$

Dans le vide:

$$\vec{F}_A = 0$$

$$(\rho_v = 0)$$

$$M_O^{ext} = (m_s g - m_p g) d \sin \theta =$$

$$(m_s - m_s + \rho_a (V_s - V_p)) g d \sin \theta =$$

$$\rho_a (V_s - V_p) g d \sin \theta > 0$$



La boule de plomb monte
 et celle de SageX descend à
 cause du changement du
 moment des forces

$$\vec{M}_O^{ext} = \rho_a (V_s - V_p) g d \sin \theta \hat{e}_\phi = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \quad d\vec{L}_O = \vec{L}_O(dt) - \vec{L}_O(0) = \vec{L}_O(dt) = \vec{M}_O^{ext} dt$$

7.4 Lois de conservation pour un système isolé

- Pour un système isolé (aucune force de l'extérieur) $\Rightarrow \vec{F}^{ext} = 0 ; \vec{M}_O^{ext} = 0$

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{constante}$$

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = \text{constante}$$

par rapport à n'importe quel point O du référentiel

- Pour un système **partiellement isolé** selon une direction fixe \hat{u} :

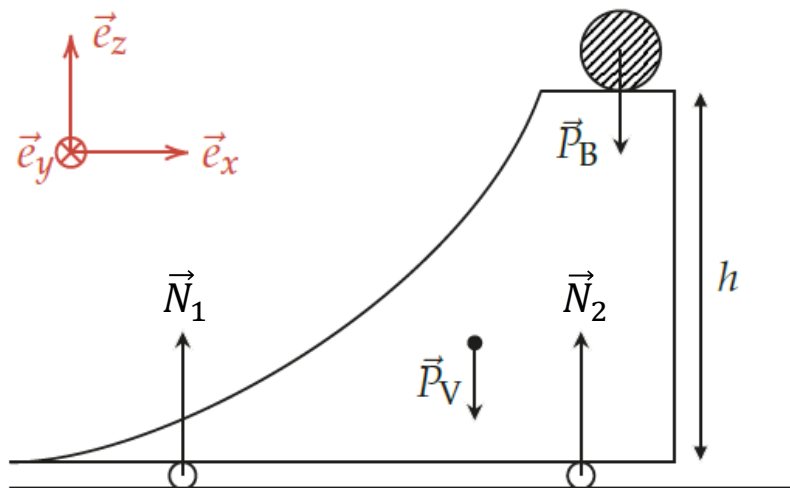
$$\vec{F}^{ext} \cdot \hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

$$\vec{M}_O^{ext} \cdot \hat{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

- Si forces conservatives: $E = \text{constante}$

Permettent de résoudre de façon simple certains problèmes complexes

7.4 Ex: voiture à boulet



$$\vec{P}_V = m_V \vec{g}$$

$$\vec{P}_B = m_B \vec{g}$$

On fait rouler le boulet vers le bas,
que fait la voiture?

Forces externes sont verticales
 $\Rightarrow \vec{F}^{\text{ext}} \cdot \hat{e}_x = 0 \Rightarrow \vec{p}_x = cte$

$$m_B \vec{v}_{Bx} + m_V \vec{v}_{Vx} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{Bx} = -\frac{m_V \vec{v}_{Vx}}{m_B}$$

Force de pesanteur est conservative $\Rightarrow E = K_B + K_V + V_B + V_V = cte$

$$m_B gh = \frac{1}{2} m_B v_{Bx}^2 + \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2$$

$$m_B gh = \frac{1}{2} m_B v_{Vx}^2 \frac{m_V^2}{m_B^2} + \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2 = \frac{1}{2} m_V v_{Vx}^2 \left(1 + \frac{m_V}{m_B}\right) \Rightarrow v_{Vx}^2 = 2gh \frac{m_B}{m_V \left(1 + \frac{m_V}{m_B}\right)}$$

$$\text{Si } m_B = m_V \Rightarrow v_{Vx} = \sqrt{gh}$$